DMI

UNIVERSITE ABDELMALEK ESSAADI
Ecole Nationale des Sciences Appliquées
Al Hoceima

ENSAH

CP-II, Semestre 3	Examen d'Analyse 3	Année: 2019/2020
4 Février 2020 ,	durée : 2h.	Prof: F.MORADI

N.B: il sera tenu compte de la Rédaction et de la Clarté de la Réponse "RCR".

Exercice 1 : (7points)

Soit f une fonction de classe C^1 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ et $r\in\mathbb{R}$.

On dit que f est homogène de degré r si:

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2, \forall t>0: \quad f(tx,ty) = t^r f(x,y)$$

1- Posons pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ et $t>0$: $g(x,y) = f(tx,ty)$

1pt a- Montrer que g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

b- Calculer $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)$ et $\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)$ en fonction de

1pt $\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty)$.

c- Montrer que si f est homogène de degré r alors ses dérivées

1pt partielles sont homogène de degré $r-1$.

2- Posons pour $t>0$: $\varphi(t) = f(tx,ty)$

a- Montrer que φ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et calculer $\varphi'(t)$

1pt en fonction de $\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty)$.

b- Supposons que f est homogène de degré r, montrer que:

1pt
$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2: \quad x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = rf(x,y)$$

c- Réciproquement, supposons que:

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2: \quad x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = rf(x,y)$$

1pt i- Montrer que: $\forall t>0: \quad t\varphi'(t) = r\varphi(t)$.

0,5 ii- Montrer que la fonction $\psi(t) = t^{-r}\varphi(t)$ est une fonction constante.

0,5 iii- En déduire que f est homogène de degré r.

$y - 4$

Exercice 2 : (13points)

Considérons la fonction :

$$h(x,y) = x^4 - 2x^3 + x^2 + y^2 - 4y + 20$$

1,5 1- Calculer $\frac{\partial h}{\partial x}(x,y)$ et $\frac{\partial h}{\partial y}(x,y)$ puis déterminer la différetielle dh.

1 2- Montrer que h admet trois points critiques à déterminer.

2 3- Calculer :

$$r = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,y)\,, \qquad s = \frac{\partial^2 h}{\partial x\,\partial y}(x,y)\,, t = \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(x,y)$$

et $\Delta = s^2 - rt$.

1 4- Montrer que h admet deux minimums locaux et un point selle.

5- Soit (x_0, y_0) fixé et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$

1 a- Donner la formule de Taylor Young de h a l'ordre deux au voisinage de (x_0, y_0).

0,5 b- Donner l'approché linéaire de $h(x_0 + \alpha, y_0 + \beta)$.

0,5 c- Donner l'approché quadratique de $h(x_0 + \alpha, y_0 + \beta)$.

0,5 6- Donner une valeur approchée de $h(0.1, 0.2)$. → 13,25

7- Montrer que:

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : h(x,y) = x^2(x-1)^2 + (y-2)^2 + 16$$

1,5 Et calculer $h(0,1)$ et $h(0,3)$

8- Montrer qu'au voisinage de (2,2), l'ensemble :

1 $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : h(x,y) = 20\}$ est un arc paramétré.

9- Posons: $k(x,y) = \big(h(x,y)\,, x(x-1)\big)$

1 a) Déterminer la matrice jacobienne $J_k(x,y)$ de k et son jacobien $j_k(x,y)$.

1 b) Montrer que k est un C^1-difféomorphisme local sur l'ouvert $U = \left(\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}\right) \times (\mathbb{R} \setminus \{2\})$

0,5 c) La fonction k est-elle un C^1-difféomorphisme global sur U? justifier.

BON COURAGE!

$x^2 - x$.

$h(1,3)$

Université Mohammed Premier
Ecole Nationale des Sciences Appliquées d'Al-Hoceima
Département de Mathématiques et d'Informatique

Examen d'Analyse 3

février 2018, durée : 2h.

CP2, Semestre 3. Année universitaire : 2017-2018 .

N.B: il sera tenu compte de la rédaction et la clarté de la feuille. *F .MORADI*

Exercice 1 : (14points)

A) Considérons la fonction :

$$f(x,y) = x^3 + 3(xy^2 - 13x - 12y)$$

1 — 1. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

1 — 2. Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ puis déterminer la différetielle df.

2 — 3. Montrer qu'il existe une fonction $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto y = \varphi(x)$ de classe C^1 et un voisinage I de 0 telle que :

$\varphi(0) = 0$ et φ est définie implicitement par l'équation: $f(x,y) = 0$

1 — 4. Déterminer $\varphi'(x)$ en fonction de x et de $\varphi(x)$ sur I.

0,5 — 5. Donner la valeur de $\varphi'(0)$.

2 — 6. Montrer que f admet quatre points critiques à déterminer.

2 — 7. Calculer :

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y), \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y), \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$$

et $\Delta = s^2 - rt$.

1,5 — 8. Montrer que f admet deux points selles, un minimum local et un maximum local.

B) Considérons la fonction : $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par :

DMI

Université Mohammed Premier
Ecole Nationale des Sciences Appliquées d'Al-Hoceima
Département de Mathématiques et d'Informatique

ENSAH

	$g(x,y) = (x^3 + 3(xy^2 - 13x - 12y) \ , \qquad x)$
1	9. Déterminer la matrice jacobienne $J_g(x,y)$.
0,5	10. Calculer le jacobien $j_g(x,y)$,
	Soit l'ouvert $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ xy < 6\}$ et soit $(a,b) \in U$.
1	11. Montrons que g est un C^1-difféomorphisme local au voisinage de (a,b).
0,5	12. Sachant que g est injective sur U, que peut-on dire de cette fonction ?
	Exercice 2 : (6 points)
	Soit la fonction : $\beta(x,y) = \sin(xy)$.
1	a- Déterminer le gradient de β en (x,y) puis $\nabla\beta(0,0)$.
1,5	b- Calculer les dérivées partielles $\frac{\partial^2\beta}{\partial x^2}(x,y)$, $\frac{\partial^2\beta}{\partial y^2}(x,y)$, $\frac{\partial^2\beta}{\partial x \partial y}(x,y)$ et en déduire $H_\beta(x,y)$ la matrice Hessienne de β en (x,y) puis $H_\beta(0,0)$.
	Soit (x_0, y_0) fixé et $(h,k) \in \mathbb{R}^2$.
1	c- Donner la formule de Taylor Young de β à l'ordre deux au voisinage de (x_0, y_0).
0,5	d- Donner l'approché linéaire de $\beta(x_0 + h, y_0 + k)$.
0,5	e- Donner l'approché quadratique de $\beta(x_0 + h, y_0 + k)$.
1	f- Donner la formule de Taylor Young de β à l'ordre deux au voisinage de $(0,0)$.
0,5	g- En déduire une valeur approchée de $\sin\left(\frac{\pi^2}{144}\right)$.

BONNE CHANCE !

Université Mohammed 1er, Oujda — Année 2016/2017

ENSA d'Al-Hoceima — Semestre 1,

CP-II, — Analyse 3

Devoir surveillé 1

19 décembre 2016, durée : 1h30mn.

Exercice 1 : (7points)

Notons $E = C([0,1],\mathbb{R})$ l'ensemble des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.
On définit sur E les deux applications suivantes :
Pour $f \epsilon E$,

$$N_1(f) = \int_0^1 |f(x)|dx \quad \text{et} \quad N_\infty(f) = sup\{|f(x)|: \quad x\epsilon[0,1]\}.$$

2pt 1- Montrer que N_1 et N_∞ sont deux normes sur E.

1pt 2- Montrer que :

$$\forall f \epsilon E: \quad N_1(f) \leq N_\infty(f)$$

3- Considérons la suite de fonctions suivante :
pour $n \geq 3$:

$$f_n(x) = \begin{cases} (n^3 - n^2)x + n. & si\ 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ -(n^3 - n^2)x + 2n^2 - n & si\ \frac{1}{n} < x < \frac{2}{n} \\ \frac{n^2}{2-n}(x-1) & si\ \frac{2}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

1.5pt a- En encadrant $f_n(x)$ sur les intervalles $\left[0,\frac{1}{n}\right]$, $\left]\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right[$ et $\left[\frac{2}{n},1\right]$, montrer que :

$$\forall x\epsilon[0,1]: \ 0 \leq f_n(x) \leq f_n\left(\frac{1}{n}\right) = n^2$$

0.5pt b- En déduire $N_\infty(f_n)$.

1pt c- Montrer que : $\forall n \geq 3$: $N_1(f_n) = \frac{3}{2}n$

1pt d- Ces deux normes sont-elles équivalentes ? justifier.

Exercice 2 : (3points)

Soit $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction définie par :

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x-y)^2} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

2pt 1- Montrer que :

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} g(x,y)\right) = \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} g(x,y)\right) = 0$$

1pt 2- Peut-on en déduire que :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = 0 \ ?$$

Justifier.

Exercice 3: (4points)

Soit $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction définie par :

$$f(x,y) = \frac{\sin(xy)}{xy}$$

1pt 1- Déterminer D_f l'ensemble de définition de f.

1pt 2- Etudier la continuité de f sur D_f.

1pt 3- En utilisant l'égalité : $\lim_{t\to 0} \frac{sint}{t} = 1$, montrer que :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 1$$

1pt 4- f admet-elle un prolongement par continuité en (0,0)? si oui, déterminer le.

Exercice 4: (6points)

Soit $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $\mathbb{R}^2$ telle que : $f(1,0) \neq f(-1,0)$
et $C(0,1)$ le cercle unité.

1- Considérons : $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ définie par : $\varphi(t) = (cost, sint)$

1pt a- Montrer que : $\varphi(\mathbb{R}) \subset C(0,1)$

1pt b- Montrer que φ est différentiable sur $\mathbb{R}$ et calculer $\varphi'(t)$

2- Soit $\psi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par : $\psi(t) = f(\varphi(t+\pi)) - f(\varphi(t))$

1pt a- Montrer que ψ est différentiable sur $\mathbb{R}$ et calculer $\psi'(t)$

1pt b- Montrer que $\psi(0).\psi(\pi) < 0$

1pt c- En déduire qu'il existe $t_0 \epsilon]0,\pi[$: $\psi(t_0) = 0$

1pt 3- Montrer qu'il existe au moins deux points A et B sur $C(0,1)$ diamétralement opposés tels que :

$$f(x_A, y_A) = f(x_B, y_B)$$

Bonne chance !